Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις

Τρίτη 23-9-2014

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ :

Α.Μ.:

1. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(x^2-2x)y''+5(x-1)y'+3y=0; y(1)=c_0, y'(1)=c_1.$$

i) Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν λύσεις του προβλήματος που ορίζονται σε φραγμένο διάστημα και είναι μη φραγμένες.

ii) Αν $c_0c_1>0$ να εξεταστεί α) αν όλες οι λύσεις του προβλήματος είναι μη φραγμένες β) αν υπάρχει λύση που να ορίζεται στο διάστημα $[0,2]$.

2. Θεωρούμε την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$xy''+2y'+xy=0, x>0.$$

i) Να επιλυθεί η εξίσωση με την βοήθεια του μετασχηματισμού $z=\frac{x}{sinx}y$.

ii) Να βρεθεί η λύση που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y(\pi/2)=0, y'(\pi/2)=1$.

iii) Να εξεταστεί αν υπάρχουν φραγμένες λύσεις της εξίσωσης α) στο $(1,+\infty)$ β) στο $(0,1)$.

iv) Να εξεταστεί αν υπάρχει λύση της εξίσωσης που μπορεί να οριστεί στο $[0,1]$.

3. Θεωρούμε την μη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$yy'+x=\frac{(x^2+y^2)^2}{2x^2}+\frac{x^2+y^2}{x}, \quad x>0.$$

i) Να επιλυθεί η εξίσωση και να βρεθεί η λύση y_0 με $y_0(1)=1$.

ii) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $c>0$ η εξίσωση έχει δύο (τουλάχιστον) μη φραγμένες λύσεις που ορίζονται στο $(0,c)$.

4. i) Να εξετασθεί αν υπάρχουν λύσεις της δ. ε. $y''+y=sin2x, x\geq 0$ α) φραγμένες β) μη ταλαντούμενες.

ii) Να λυθεί το μη ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y_1'=4y_1+5y_2+x^2+3x+1, \quad y_2'=-2y_1-2y_2.$$

5. i) Να βρεθεί η λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης $z_x-z_y=1, x,y\in\mathbb{R}$ που πληροί την συνθήκη $z(x,0)=sinx$.

ii) Να εξεταστεί αν υπάρχει ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση τέταρτης τάξης με βασικό σύνολο λύσεων το σύνολο $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}\}$ και συντελεστή του $y^{(4)} = 2014$. Είναι η εξίσωση μοναδική· Να διατυπωθεί το θεώρημα που χρησιμοποιήθηκε.

(*) Αν y_1, y_2 είναι ένα βασικό σύνολο πραγματικών λύσεων μιας ομογενούς διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με διάστημα ορισμού $(-\infty, +\infty)$, να αποδειχθεί ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της y_1 υπάρχει ακριβώς μία ρίζα της y_2.

ΝΑ ΔΟΘΟΥΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕ 4 ΘΕΜΑΤΑ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες